1. Atlikite veiksmus su matricomis:

$A+2B$, jei

$$A=\begin{pmatrix}6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 5 & 8\\ 11 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

$$2B=2\cdot\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 3 & 5 & 8\\ 11 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0 & 2\cdot(-2) & 2\cdot 1\\ 2\cdot 3 & 2\cdot 5 & 2\cdot 8\\ 2\cdot 11 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ 6 & 10 & 16\\ 22 & 4 & 6\end{pmatrix}$$

$$A+2B=\begin{pmatrix}6 & 5 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -4 & 2\\ 6 & 10 & 16\\ 22 & 4 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+0 & 5-4 & 4+22\\ 3+6 & 2+10 & 1+16\\ 0+22 & 2+4 & 3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 26\\ 9 & 12 & 17\\ 22 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

2. Sudauginkite matricas

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 2 & 3\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 3 & 3\cdot 1+2\cdot 6+3\cdot 5\\ -1\cdot 1+5\cdot(-1)+6\cdot 2 & -1\cdot 2+5\cdot 5+6\cdot 3 & -1\cdot 1+5\cdot 6+6\cdot 5\\ 2\cdot 1+3\cdot(-1)+5\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 5+5\cdot 3 & 2\cdot 1+3\cdot 6+5\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 25 & 30\\ 6 & 41 & 59\\ 9 & 34 & 45\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot(-1)+1\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 5+1\cdot 3 & 1\cdot 3+2\cdot 6+1\cdot 5\\ -1\cdot 3+5\cdot(-1)+6\cdot 2 & -1\cdot 2+5\cdot 5+6\cdot 3 & -1\cdot 3+5\cdot 6+6\cdot 5\\ 2\cdot 3+3\cdot(-1)+5\cdot 2 & 2\cdot 2+3\cdot 5+5\cdot 3 & 2\cdot 3+3\cdot 6+5\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 15 & 20\\ 4 & 41 & 57\\ 13 & 34 & 49\end{pmatrix}$$

3. Raskite $B^T\cdot A^{-1}\cdot B$. Atvirkštinę matricą raskite adjunktų pagalba.

$$A=\begin{pmatrix}2 & 18 & -3\\ 0 & -1 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -3\\ -4 & 8\\ -5 & 3\end{pmatrix}$$

Matricos B transponuotą matricą B^T gauname matricos B visas eilutes sukeičiame vietomis su tų pačių numerių stulpeliais:

$$B^T=\begin{pmatrix}5 & -4 & -5\\ -3 & 8 & 3\end{pmatrix}$$

Randame matricos A atvirkštinę:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 18 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)\cdot 4+18\cdot 0\cdot(-2)+0\cdot 0\cdot(-3)-(-2)\cdot(-1)\cdot(-3)-0\cdot 18\cdot 4-0\cdot 0\cdot 2=-2$$

$|A|=-2\neq 0 \Rightarrow$ atvirkštinė matrica egzistuoja.

Apskaičiuojame matricos A adjunktus:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-1\cdot 4-0\cdot 0=-4$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=-1\cdot(0\cdot 4-(-2)\cdot 0)=0$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=0\cdot 0-(-2)\cdot(-1)=-2$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 18 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=-1\cdot(18\cdot 4-0\cdot(-3))=-72$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-(-2)\cdot(-3)=2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot(2\cdot 0-(-2)\cdot 18)=-36$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 18 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=18\cdot 0-(-1)\cdot(-3)=-3$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=-1\cdot(2\cdot 0-0\cdot(-3))=0$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 18 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)-0\cdot 18=-2$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -72 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -36 & -2 \end{pmatrix}$$

Patikrinimas:

$$A^{-1}A=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -72 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -36 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 18 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4\cdot 2+(-72)\cdot 0+(-3)\cdot(-2) & -4\cdot 18+(-72)\cdot(-1)+(-3)\cdot 0 & -4\cdot(-3)+(-72)\cdot 0+(-3)\cdot 4 \\ 0\cdot 2+2\cdot 0+0\cdot(-2) & 0\cdot 18+2\cdot(-1)+0\cdot 0 & 0\cdot(-3)+2\cdot 0+0\cdot 4 \\ -2\cdot 2+(-36)\cdot 0+(-2)\cdot(-2) & -2\cdot 18+(-36)\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 & -2\cdot(-3)+(-36)\cdot 0+(-2)\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Apskaičiuojame $B^T \cdot A^{-1}$:

$$B^T A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -5 \\ -3 & 8 & 3 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -72 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -36 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 5\cdot(-4)+(-4)\cdot 0+(-5)\cdot(-2) & 5\cdot(-72)+(-4)\cdot 2+(-5)\cdot(-36) & 5\cdot(-3)+(-4)\cdot 0+(-5)\cdot(-2) \\ -3\cdot(-4)+8\cdot 0+3\cdot(-2) & -3\cdot(-72)+8\cdot 2+3\cdot(-36) & -3\cdot(-3)+8\cdot 0+3\cdot(-2) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -10 & -188 & -5 \\ 6 & 124 & 3 \end{pmatrix}$$

Apskaičiuojame $B^T \cdot A^{-1} \cdot B$:

$$B^T A^{-1} B = -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -10 & -188 & -5 \\ 6 & 124 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 8 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -10\cdot 5+(-188)\cdot(-4)+(-5)\cdot(-5) & -10\cdot(-3)+(-188)\cdot 8+(-5)\cdot 3 \\ 6\cdot 5+124\cdot(-4)+3\cdot(-5) & 6\cdot(-3)+124\cdot 8+3\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -727 & -1489 \\ -481 & 1019 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{727}{2} & \frac{1489}{2} \\ \frac{481}{2} & -\frac{1019}{2} \end{pmatrix}$$

Atsakymas: $B^T A^{-1} B = \begin{pmatrix} \frac{727}{2} & \frac{1489}{2} \\ \frac{481}{2} & -\frac{1019}{2} \end{pmatrix}$

4. Raskite matricos atvirkštinę Gauso metodu:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot\frac{1}{3} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad + \quad /\cdot(-2) \quad +$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 17/3 & 7 & 1/3 & 1 & 0\\ 0 & 5/3 & 3 & -2/3 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ /\cdot(3/17)\\ /\cdot(3/5)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 21/17 & 1/17 & 3/17 & 0\\ 0 & 1 & 9/5 & -2/5 & 0 & 3/5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ /\cdot(-1)\\ +\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 21/17 & 1/17 & 3/17 & 0\\ 0 & 0 & 48/85 & -39/85 & -3/17 & 3/5\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ /\cdot(85/48)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2/3 & 1 & 1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 21/17 & 1/17 & 3/17 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -13/16 & -5/16 & 17/16\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ /\cdot(-21/17)\ +\ /\cdot(-1)\ +\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2/3 & 0 & 55/48 & 5/16 & -17/16\\ 0 & 1 & 0 & 17/16 & 9/16 & -21/16\\ 0 & 0 & 1 & -13/16 & -5/16 & 17/16\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ /\cdot(-2/3)\ +\\ \\ \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 7/16 & -1/16 & -3/16\\ 0 & 1 & 0 & 17/16 & 9/16 & -21/16\\ 0 & 0 & 1 & -13/16 & -5/16 & 17/16\end{array}\right)$$

Kairėje gavome vienetinę matricą. Tada matricos A atvirkštinė A^{-1} yra matrica gauta dešinėje pusėje:

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}7/16 & -1/16 & -3/16\\ 17/16 & 9/16 & -21/16\\ -13/16 & -5/16 & 17/16\end{pmatrix}$$

Atliekame patikrinimą:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}7/16 & -1/16 & -3/16\\ 17/16 & 9/16 & -21/16\\ -13/16 & -5/16 & 17/16\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{7}{16}\cdot3-\frac{1}{16}\cdot(-1)-\frac{3}{16}\cdot2 & \frac{7}{16}\cdot2-\frac{1}{16}\cdot5-\frac{3}{16}\cdot3 & \frac{7}{16}\cdot3-\frac{1}{16}\cdot6-\frac{3}{16}\cdot5\\ \frac{17}{16}\cdot3+\frac{9}{16}\cdot(-1)-\frac{21}{16}\cdot2 & \frac{17}{16}\cdot2+\frac{9}{16}\cdot5-\frac{21}{16}\cdot3 & \frac{17}{16}\cdot3+\frac{9}{16}\cdot6-\frac{21}{16}\cdot5\\ -\frac{13}{16}\cdot3-\frac{5}{16}\cdot(-1)+\frac{17}{16}\cdot2 & -\frac{13}{16}\cdot2-\frac{5}{16}\cdot5+\frac{17}{16}\cdot3 & -\frac{13}{16}\cdot3-\frac{5}{16}\cdot6+\frac{17}{16}\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Gavome, kad $A^{-1}A=E\Rightarrow$ atvirkštinė matrica apskaičiuota teisingai.

5. Apskaičiuokite matricos $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix}$ determinantą išskleisdami pagal antrąją eilutę.

Skleidžiame determinantą pagal 2-ąją eilutę:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 5 & 6\\ 2 & 3 & 5\end{vmatrix}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-1\cdot(2\cdot 5-3\cdot 3)=-1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}M_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 5\end{vmatrix}=3\cdot 5-2\cdot 3=9;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-1\cdot(3\cdot 3-2\cdot 2)=-5.$$

$$\Rightarrow |A|=-1\cdot(-1)+5\cdot 9+6\cdot(-5)=16.$$

Atsakymas: $|A|=16.$

6. Apskaičiuokite determinantą laisvai pasirinktoje eilutėje arba stulpelyje generuojant nulius:

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 3 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1\\ 3 & -2 & -1 & 3 & 3\\ -1 & -2 & -3 & 0 & -3\\ -1 & -2 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}/\cdot 3 & /\cdot(-1) & /\cdot(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}-1 & -1 & 3 & -2 & -3\\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -5 & 8 & -3 & -6\\ 0 & -1 & -6 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0 & 1\\ -5 & 8 & -3 & -6\\ -1 & -6 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0 & 1\\ -5 & 8 & -3 & -6\\ -1 & -6 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0 & -11\\ -5 & 8 & -3 & -26\\ -1 & -6 & 2 & -4\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=$$

$/\cdot 4$

$$=-1\cdot(-1)^{4+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & -11\\ 8 & -3 & -26\\ -6 & 2 & -4\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & -11\\ 8 & -3 & -26\\ -6 & 2 & -4\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 8 & -3 & 62\\ -6 & 2 & -70\end{vmatrix}=$$

$/\cdot 11$

$$=-1\cdot(-1)^{1+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 62\\ 2 & -70\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 62\\ 2 & -70\end{vmatrix}=-1\cdot(-3\cdot(-70)-2\cdot 62)=-1\cdot(210-124)=-86.$$

7. Apskaičiuokite matricos rangą.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-3) \;\; /\cdot(-3) \;\; /\cdot(-3) \;\; /\cdot 2 \\ + \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & -1 & -9 & 9 \\ 0 & 9 & -3 & -12 & 7 \\ 0 & 12 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & -9 & -3 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /:9 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/9 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & -3 & -12 & 7 \\ 0 & 12 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & -9 & -3 & 4 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ /\cdot(-9) \;\; /\cdot(-12) \;\; /\cdot 9 \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /:(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /\cdot(-4/3) \;\; /\cdot 4 \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -16/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ /:2 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ /\cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1/9 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 23/3 \end{pmatrix}$$

Gavome ekvivalentinę 5 eilės trikampę matricą, kurios pagrindinės įstrižainės visi elementai nelygus nuliui. Todėl duotos matricos rangas yra lygus 5.

Atsakymas: $rang(A) = 5$.