1. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą Gauso-Žordano metodu:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 18. \end{cases}$$

Sprendimas:

Gauso-Žordano metodas

Sprendžiame gautą lygčių sistemą Gauso-Žordano metodu. Sudarome lygčių sistemos išplėstąją matricą (A/B) ir elementariai pertvarkau jos eilutes:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & -2 & -3 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-1) \quad /\cdot(-5) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 8 & -13 & 13 \end{array}\right) /\cdot\frac{1}{5}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 & 3/5 \\ 0 & 8 & -13 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /\cdot(-8) \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & -41/5 & 41/5 \end{array}\right) /\cdot\left(-\frac{5}{41}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ + \\ /\cdot\frac{3}{5} \quad /\cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} + \\ /\cdot 2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Atstatę lygčių sistemą, gauname:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

Atliekame patikrinimą:

$$\begin{cases} 3 - 2\cdot 0 + 2\cdot(-1) = 1 \\ 3 + 3\cdot 0 - 1\cdot(-1) = 4 \\ 5\cdot 3 - 2\cdot 0 - 3\cdot(-1) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1 \\ 4 = 4 \\ 18 = 18 \end{cases}$$

Atsakymas: $x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1$.

2. Išspręskite tiesinių lygčių sistemą Gauso metodu:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Sprendimas:

Sudarau sistemos išplėstąją matricą (A/B) ir elementariai pertvarkau jos eilutes:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) /\cdot(-2) \;+\; /\cdot(-1) \;+ \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) /\cdot(-1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) /\cdot(-2) \;+\; /\cdot(-3) \;+ \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /\cdot\frac{1}{3} \\ /\cdot\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Atstatome lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_3 - 2x_4 = -2 \\ x_4 = a,\ a \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_4 + 2 = 0 - a + 2 = -a + 2 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 + 2 = 2a - 2 - 2a + 2 = 0 \\ x_3 = 2x_4 - 2 = 2a - 2 \\ x_4 = a,\ a \in R \end{cases}$$

Atliekame patikrinimą:

$$\begin{cases} -a + 2 - 2\cdot 0 + a = 2 \\ 2\cdot(-a+2) - 5\cdot 0 + 2a - 2 = 2 \\ -a + 2 + 2a - 2 - a = 0 \\ 3\cdot 0 - (2a - 2) + 2a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = 2 \\ 2 = 2 \\ 0 = 0 \\ 2 = 2 \end{cases}$$

Atsakymas: $x_1 = -a + 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2a - 2,\ x_4 = a;\ a \in R$ (bet koks skaičius iš racionaliųjų skaičių aibės).

3. Išspręskite lygčių sistemą, pasinaudoję Kramerio formulėmis:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

Sprendimas:

Apskaičiuojame lygčių sistemos pagrindinį determinantą (sudarytą iš koeficientų prie nežinomųjų *x*):

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot(-1) - 3\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 2 = -1.$$

Gavome, kad $\Delta = -1 \neq 0$, todėl lygčių sistemos sprendinys egzistuoja ir $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Apskaičiuojame determinantus $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ (kuriuose koeficientų prie *i*-tojo nežinomojo stulpelis pakeistas laisvųjų narių stulpeliu):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 5 + (-3)\cdot 1\cdot(-1) - 5\cdot 2\cdot(-1) - (-3)\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 3 = 24;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 5\cdot(-1) - 1\cdot(-3)\cdot(-1) - 3\cdot 3\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 2 = -40;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 5 + 1\cdot(-3)\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 5 - 1\cdot(-3)\cdot 2 = 11.$$

Apskaičiuojame x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = \frac{24}{-1} = -24; \quad x_2 = \frac{-40}{-1} = 40; \quad x_3 = \frac{11}{-1} = -11.$$

Patikrinimas:

$$\begin{cases} 2\cdot(-24) + 40 - (-11) = 3, \\ 3\cdot(-24) + 2\cdot 40 + (-11) = -3, \\ -24 + 40 + (-11) = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -48 + 40 + 11 = 3, \\ -72 + 80 - 11 = -3, \\ -24 + 40 - 11 = 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3, \\ -3 = -3, \\ 5 = 5. \end{cases}$$

Atsakymas: $x_1 = -24,\ x_2 = 40,\ x_3 = -11.$

4. Atvirkštinės matricos metodu išspręskite lygčių sistemą:

$$\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3=-4, \\ x_1+4x_2-3x_3=-20, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=-4. \end{cases}$$

Sprendimas:

$$AX=B$$
$$X=A^{-1}B$$

kur $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ir $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ yra matricos A atvirkštinė matrica.

Apskaičiuojame matricos A determinantą::

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-1\cdot4\cdot2+2\cdot(-3)\cdot2+1\cdot2\cdot(-1)-2\cdot4\cdot(-1)-1\cdot2\cdot2-2\cdot(-3)\cdot(-1)=-24$$

Gavome, kad $|A|=-24\neq0 \Rightarrow$ atvirkštinė matrica egzistuoja.

Apskaičiuojame matricos A adjunktus:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=8+6=14; \quad A_{12}=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2-6=-8; \quad A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2-8=-6;$$
$$A_{21}=-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-4-2=-6; \quad A_{22}=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2+2=0; \quad A_{23}=-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=2+4=6;$$
$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=-6+4=-2; \quad A_{32}=-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-3-1=-4; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-4-2=-6.$$

Tada matricos A atvirkšinė matrica yra:

$$A^{-1}=-\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -4 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Patikriname ar atvirkštinė matrica yra apskaičiuota teisingai:

$$A^{-1}A=-\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -4 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}=-\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Gavome vienetinę matricą $\Rightarrow$ atvirkštinė matrica yra apskaičiuota teisingai.

Apskaičiuojame lygčių sistemos sprendinį:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = -\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -8 & 0 & -4 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ -20 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} -56+120+8 \\ 32+0+16 \\ 24-120+24 \end{pmatrix} = -\frac{1}{24}\cdot\begin{pmatrix} 72 \\ 48 \\ -72 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Patikrinimas:

$$\begin{cases} -(-3)+2\cdot(-2)-3=-4 \\ -3+4\cdot(-2)-3\cdot 3=-20 \\ 2\cdot(-3)-2\cdot 2+2\cdot 3=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-4-3=-4 \\ -3-8-9=-20 \\ -6-4+6=-4 \end{cases}$$

Atsakymas: $x_1=-3,\ \ x_2=-2,\ \ x_3=3$.