1. Rasti diferencialinės lygties atskirąjį sprendinį.

$$\frac{dx}{x\cdot(y-1)}+\frac{dy}{y\cdot(x+2)}=0,\quad y(x=1)=1.$$

I eilės diferencialinė lygtis su atskiriamais kintamaisiais.

$$\frac{dy}{y\cdot(x+2)}=-\frac{dx}{x\cdot(y-1)}$$

$$\int\frac{(y-1)\cdot dy}{y}=-\int\frac{(x+2)\cdot dx}{x}$$

$$\int\left(1-\frac{1}{y}\right)\cdot dy=-\int\left(1+\frac{2}{x}\right)\cdot dx$$

$$y-\ln y=-(x+2\cdot\ln x)+C$$

$$y-\ln y+x+2\cdot\ln x=C$$

$$x+y+\ln\frac{x^2}{y}=C$$

Diferencialinės lygties bendrasis sprendinys: $x+y+\ln\frac{x^2}{y}=C$.

Nustatome konstantos C reikšmę pritaikę pradinę sąlygą:

$$y(x=1)=1:\ 1+1+\ln\frac{1^2}{1}=C\Rightarrow 1+1+0=C\Rightarrow C=2.$$

Diferencialinės lygties atskiras sprendinys: $x+y+\ln\frac{x^2}{y}=2$.

2. Rasti diferencialinės lygties $y'=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ bendrąjį sprendinį.

I eilės homogeninė diferencialinė lygtis.

Taikome keitinį $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u$:

$$u'\cdot x+u=\frac{x}{u\cdot x}+\frac{u\cdot x}{x}$$

$$u'\cdot x+u=\frac{1}{u}+u$$

$$\frac{du}{dx}\cdot x=\frac{1}{u}$$

$$\int u \cdot du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} u^2 = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\frac{1}{2} u^2 = \ln|C \cdot x|$$

$$u = \sqrt{2 \cdot \ln|C \cdot x|}$$

Diferencialinės lygties bendrasis sprendinys: $y = u \cdot x = x \cdot \sqrt{2 \cdot \ln|C \cdot x|}$.

3. Rasti diferencialinės lygties $y^2 \cdot dx + (x^2 - xy) \cdot dy = 0$, $y(x=1)=1$ atskirąjį sprendinį.

I eilės homogeninė diferencialinė lygtis.

Taikome keitinį $y = u \cdot x$, $dy' = x \cdot du + u \cdot dx$:

$$u^2 \cdot x^2 \cdot dx + (x^2 - x \cdot u \cdot x) \cdot (x \cdot du + u \cdot dx) = 0,$$

$$u^2 \cdot dx + (1-u) \cdot (x \cdot du + u \cdot dx) = 0,$$

$$u^2 \cdot dx + x \cdot du + u \cdot dx - u \cdot x \cdot du + u^2 \cdot dx = 0,$$

$$x \cdot (1-u) \cdot du + u \cdot dx = 0,$$

$$\int \frac{u-1}{u} \cdot du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(1 - \frac{1}{u}\right) \cdot du = \int \frac{dx}{x}$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$u - \ln|u \cdot x| = C$$

Diferencialinės lygties bendrasis sprendinys: $\frac{y}{x} - \ln|y| = C$.

Nustatome konstantos C reikšmę pritaikę pradinę sąlygą:

$$y(x=1)=1: \frac{1}{1} - \ln 1 = C \Rightarrow 1 - 0 = C \Rightarrow C = 1.$$

Diferencialinės lygties atskiras sprendinys: $\frac{y}{x} - \ln|y| = 1$.

4. Rasti diferencialinės lygties $\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)\cdot dx+\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot dy=0$ bendrąjį sprendinį.

Pažymime: $M(x,y)=2x+e^{\frac{x}{y}}$ ir $N(x,y)=\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}$.

Apskaičiuojame dalines išvestines:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial\left(\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}\right)}{\partial x}=\left(0-\dfrac{1}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}+\left(1-\dfrac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\dfrac{1}{y}=-\dfrac{x}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}\\ \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)}{\partial y}=2\cdot 0+e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{x}{y^2}\cdot e^{\frac{x}{y}}\end{cases}$$

Gavome, kad $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\Rightarrow$ tai yra pilnojo diferencialo lygtis.

Sprendinio ieškome pavidalu $u(x,y)=C$, kur $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=M(x,y)$ ir $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$:

$$u(x,y)=\int\left(2x+e^{\frac{x}{y}}\right)\cdot dx+\varphi(y)=x^2+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\left(x^2+y\cdot e^{\frac{x}{y}}+\varphi(y)\right)'_y=0+1\cdot e^{\frac{x}{y}}+y\cdot e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\varphi'(y)=e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}+\varphi'(y).$$

Iš diferencialinės lygties turime $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}$. Tada galioja lygybė:

$$e^{\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}\cdot e^{\frac{x}{y}}+\varphi'(y)=\left(1-\frac{x}{y}\right)\cdot e^{\frac{x}{y}}$$

$$\varphi'(y)=0$$

$$\varphi(y)=C$$

Diferencialinės lygties bendrasis sprendinys: $x^2+y\cdot e^{\frac{x}{y}}=C$.

5. Raskite diferencialinės lygties $(x+1)\cdot y'-2y=(1+x)^4$ bendrąjį sprendinį.

Perrašome diferencialinę lygtį sekančių pavidalu: $y'-\dfrac{2y}{x+1}=(1+x)^3$,

Tai yra I eilės tiesinė diferencialinė lygtis. Taikome keitinį $y=u\cdot v$, $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-\frac{2\cdot u\cdot v}{x+1}=(1+x)^3,$$

$$u'\cdot v+u\cdot\left(v'-\frac{2\cdot v}{x+1}\right)=(1+x)^3.$$

Funkciją *v(x)* pasirenkame taip, kad galiotų $v'-\dfrac{2\cdot v}{x+1}=0$:

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2\cdot v}{x+1}=0$$

$$\int\frac{dv}{v}=2\cdot\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v|=2\cdot\ln|x+1|$$

$$v=(x+1)^2$$

Įrašę funkcijos $v=(x+1)^2$ reikšmę į diferencialinę lygtį, turime:

$$u'\cdot(1+x)^2+u\cdot 0=(1+x)^3$$

$$u'=1+x$$

$$\int du=\int(x+1)\cdot dx$$

$$u=\frac{1}{2}\cdot x^2+x+C$$

Diferencialinės lygties bendrasis sprendinys: $y=u\cdot v=\left(\dfrac{1}{2}\cdot x^2+x+C\right)\cdot(x+1)^2$.

6. Raskite diferencialinės lygties $y'-2xy=e^{x^2}$ bendrąjį sprendinį.

I eilės tiesinė diferencialinė lygtis.

Taikome keitinį $y=u\cdot v$, $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$:

$$u'\cdot v+u\cdot v'-2\cdot x\cdot u\cdot v=e^{x^2}$$

$$u'\cdot v+u\cdot(v'-2\cdot x\cdot v)=e^{x^2}$$

Funkciją $v(x)$ pasirenkame taip, kad galiotų $v'-2\cdot x\cdot v=0$:

$$\frac{dv}{dx}-2\cdot x\cdot v=0$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int 2x\cdot dx$$

$$\ln|v|=x^2$$

$$v=e^{x^2}$$

Įrašę funkcijos $v=e^{x^2}$ išraišką į diferencialinę lygtį, gauname:

$$u'\cdot e^{x^2}+u\cdot 0=e^{x^2}$$

$$\frac{du}{dx}=1$$

$$\int du=\int dx$$

$$u=x+C$$

Diferencialinės lygties bendrasis sprendinys: $y=u\cdot v=(x+C)\cdot e^{x^2}$.

7. Raskite diferencialinės lygties $2y'+y=\frac{x}{y}$ bendrąjį sprendinį.

$$2y'+y=\frac{x}{y}\ /\cdot y$$

$2y\cdot y'+y^2=x\Rightarrow$ I eilės Bernulio diferencialinė lygtis.

Taikome keitinį $z=y^2$, $z'=2y\cdot y'$:

$$z'+z=x.$$

Gauname I eilės tiesinę diferencialinę lygtį. Taikome keitinį $z=u\cdot v$, $z'=u'\cdot v+u\cdot v'$:

$$u'\cdot v+u\cdot v'+u\cdot v=x,$$

$$u'\cdot v+u\cdot(v'+v)=x.$$

Funkciją $v(x)$ pasirenkame taip, kad galiotų $v'+v=0$:

$$\frac{dv}{dx}+v=0$$

$$\int\frac{dv}{v}=-\int dx$$

$$\ln|v|=-x$$

$v = e^{-x}$.

Įrašę funkcijos $v = e^{-x}$ išraišką į diferencialinę lygtį, gauname:

$$u' \cdot e^{-x} + u \cdot 0 = x$$

$$u' = x \cdot e^{x}$$

$$\int du = \int x \cdot e^{x} \cdot dx$$

$$u = \int x \cdot d\left(e^{x}\right) = x \cdot e^{x} - \int e^{x} \cdot dx = x \cdot e^{x} - e^{x} + C$$

$$u = x \cdot e^{x} - e^{x} + C$$

Gavome, kad $z = u \cdot v = \left(x \cdot e^{x} - e^{x} + C\right) \cdot e^{-x}$

Diferencialinės lygties bendrasis sprendinys: $y = \sqrt{z} = \sqrt{\left(x \cdot e^{x} - e^{x} + C\right) \cdot e^{-x}} = \sqrt{x - 1 + C \cdot e^{-x}}$.

8. Išspręskite Bernulio diferencialinę lygtį $(x+1) \cdot \left(y' + y^2\right) + y = 0$.

Perrašome diferencialinę lygtį sekančių pavidalu:

$$y' + y^2 = -\frac{y}{x+1}$$

$$\frac{1}{y^2} \cdot y' + \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x+1} = -1$$

Taikome keitinį $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y'$:

$$-z' + z \cdot \frac{1}{x+1} = -1$$

$$z' - z \cdot \frac{1}{x+1} = 1$$

Gauname I eilės tiesinę diferencialinę lygtį. Taikome keitinį $z = u \cdot v$, $z' = u' \cdot v + u \cdot v'$:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{u \cdot v}{x+1} = 1,$$

$$u' \cdot v + u \cdot \left(v' - \frac{v}{x+1}\right) = 1.$$

Funkciją $v(x)$ pasirenkame taip, kad galiotų $v' - \frac{v}{x+1} = 0$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x+1} = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|v| = \ln|x+1|$$

$$v = x+1.$$

Įrašę funkcijos $v = x+1$ išraišką į diferencialinę lygtį, gauname:

$$u' \cdot (x+1) + u \cdot 0 = 1$$

$$u' = \frac{1}{x+1}$$

$$\int du = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$u = \ln|x+1| + C$$

Diferencialinės lygties $z' - z \cdot \frac{1}{x+1} = 1$ bendrasis sprendinys: $z = u \cdot v = (\ln|x+1| + C) \cdot (x+1)$.

Grįžtame prie kintamojo y ir randame lygties $(x+1) \cdot (y' + y^2) + y = 0$ bendrąjį sprendinį:

$$y = \frac{1}{z} = \frac{1}{(\ln|x+1| + C) \cdot (x+1)}$$