MECHANIKA

Slenkamojo judėjimo pagrindinės kinematinės ir dinaminės charakteristikos ir dėsningumai (greitis ir jo projekcijos, pagreitis).

1. Materialiojo taško padėties vektoriaus kitimą aprašo lygtis $\vec{r}=\vec{i}+2t\vec{j}+3t^2\vec{k}$. Raskite taško poslinkį per pirmąją judėjimo sekundę, jo modulį, pagreitį ir greičio modulį tuo laiko momentu.

Duota:
$\vec{r}=\vec{i}+2t\cdot\vec{j}+3t^2\cdot\vec{k}$
$t_1=1\,\mathrm{s}$
Rasti: $\Delta\vec{r}, |\Delta\vec{r}|, a, v-?$

Pradiniu laiko momentu $t=0$ kūno padėties vektorius yra:

$$\vec{r}_0=\vec{r}\big|_{t=0}=\vec{i}+2\cdot0\cdot\vec{j}+3\cdot0\cdot\vec{k}=\vec{i}\ .$$

Laiko momentu $t_1=1\,\mathrm{s}$ kūno padėties vektorius yra:

$$\vec{r}_1=\vec{r}\big|_{t=1}=\vec{i}+2\cdot1\cdot\vec{j}+3\cdot1^2\cdot\vec{k}=\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}\ .$$

Taško poslinkio vektorius per pirmąją judėjimo sekundę ir jo modulis:

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_0=\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}-\vec{i}=0\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}\ ;$$
$$|\Delta\vec{r}|=\sqrt{0^2+2^2+3^2}=\sqrt{13}\,\mathrm{m}\approx3{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

Kūno momentinis greitis: $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Apskaičiuojame kūno greičio modulį laiko momentu $t_1=1\mathrm{s}$:

$$\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(\vec{i}+2t\cdot\vec{j}+3t^2\cdot\vec{k}\right)=0\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+6t\cdot\vec{k}\ ;$$
$$\vec{v}_1=0\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+6\cdot1\cdot\vec{k}=0\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}\ ;$$
$$|\vec{v}_1|=\sqrt{0^2+2^2+6^2}=2\sqrt{10}=6{,}3\,\mathrm{m/s}.$$

Kūno pagreitis: $\vec{a}=\dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

Apskaičiuojame kūno pagreičio modulį laiko momentu $t_1=1\mathrm{s}$:

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}\left(0\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+6t\cdot\vec{k}\right)=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}\ ;$$
$$\vec{a}_1=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}=0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}+6\cdot\vec{k}\ ;$$
$$|\vec{a}_1|=\sqrt{0^2+0^2+6^2}=6\,\mathrm{m/s^2}.$$

Atsakymas: $\Delta\vec{r}=0\cdot\vec{i}+2\cdot\vec{j}+3\cdot\vec{k}$; $|\Delta\vec{r}|=3{,}6\,\mathrm{m}$; $|\vec{v}_1|=6{,}3\,\mathrm{m/s}$; $|\vec{a}_1|=6\,\mathrm{m/s^2}$.

2. ¾ savo kelio materialusis taškas judėjo greičiu 6 m/s, o likusią kelio dalį greičiu 8 m/s. Koks materialaus taško vidutinis greitis?

Duota:

$s_1 = \frac{3}{4}s$

$s_2 = \frac{1}{4}s$

$v_1 = 6\,\text{m/s}$

$v_2 = 8\,\text{m/s}$

Rasti: $v_{vid} - ?$

Vidutinis greitis yra lygus visam nueitam keliui padalintam iš judėjimo laiko: $v_{vid} = \frac{s}{t}$.

Apskaičiuojame vidutinį greitį:

$$v_{vid} = \frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2}} = \frac{s}{\frac{3s}{4v_1} + \frac{1s}{4v_2}} = \frac{4v_1 \cdot v_2}{3v_2 + v_1};$$

$$v_{vid} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 8 + 6} = 6{,}4\,\text{m/s}.$$

Atsakymas: $v_{vid} = 6{,}4\,\text{m/s}$.

3. Pro 20 m aukštyje, esantį langą berniukas išmetė kamuolį, ir šis nukrito po 1 s. Kokiu greičiu buvo mestas kamuolys?

Duota:

$h = 20\,\text{m}$

$t = 1\,\text{s}$

Rasti: $v_0 - ?$

Išmestas kamuolys juda veikiamas tik sunkio jėgos, kuri suteikia jam laisvojo kritimo pagreitį $g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$. Tolygiai greitėjančiai judančio kamuolio judėjimo lygtis:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

Iš čia išreiškę kamuolio pradinį greitį v_0, gauname:

$v_0 = \frac{s}{t} - \frac{a \cdot t}{2}$, kur $a = g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$;

kai $t = 1\,\text{s}$, $s = h = 20\,\text{m}$: $v_0 = \frac{20}{1} - \frac{9{,}81 \cdot 1}{2} = 15{,}1\,\text{m/s}$.

Atsakymas: $v_0 = 15{,}1\,\text{m/s}$.

Sukamojo judėjimo kinematiniai dydžiai. Linijinis ir kampiniai greičiai. Pagreitis ir jo dedamosios: tangentinis ir normalinis.

4. Materialusis taškas juda 2 m spindulio apskritimu pagal dėsnį $s = 8t - 0{,}2t^3$. Apskaičiuokite taško greitį, tangentinį ir normalinį pagreičius po 3 s nuo stebėjimo pradžios.

$R = 2\ \mathrm{m}$
$s = 8t - 0{,}2t^3$
$t = 3\,\mathrm{s}$
$\mathrm{v}, a_\tau, a_\mathrm{n}$ - ?

Nustatome materialiojo taško linijinio greičio išraišką ir apskaičiuojame taško greitį po $t = 3\,\mathrm{s}$ nuo stebėjimo pradžios:

$$\mathrm{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8t - 0{,}2t^3\right) = 8 \cdot 1 - 0{,}2 \cdot 3t^2 = 8 - 0{,}6t^2 .$$

$$\mathrm{v}(\mathrm{t} = 3) = 8 - 0{,}6 \cdot 3^2 = 2{,}6\ \mathrm{m/s}.$$

Apskaičiuojame taško normalinį pagreitį po $t = 3\,\mathrm{s}$ nuo stebėjimo pradžios:

$$a_n = \frac{\mathrm{v}^2}{R};$$

$$a_n(t = 3) = \frac{2{,}6^2}{2} = 3{,}4\ \mathrm{m/s^2}.$$

Apskaičiuojame taško tangentinį pagreitį po $t = 3\,\mathrm{s}$ nuo stebėjimo pradžios:

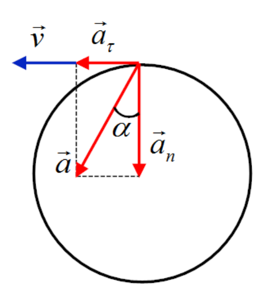
$$a_\tau = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8 - 0{,}6t^2\right) = 0 - 0{,}6 \cdot 2t = -1{,}2t;$$

$$a_\tau(t = 3) = -1{,}2 \cdot 3 = -3{,}6\ \mathrm{m/s^2}.$$

Atsakymas: $\mathrm{v} = 2{,}6\ \mathrm{m/s}$; $a_n = 3{,}4\ \mathrm{m/s^2}$; $a_\tau = -3{,}6\ \mathrm{m/s^2}$.

5. 10 m spindulio apskritimu juda materialusis taškas. Tam tiru laiko momentu taško normalinis pagreitis 4,9m/s². Šiuo momentu pilnutinio pagreičio vektorius su normalinio pagreičio vektoriumi sudaro 60^0 kampą. Apskaičiuokite taško tangentinį pagreitį.

$R = 10\ \mathrm{m}$
$a_n = 4{,}9\ \mathrm{m/s^2}$
$\alpha = 60^0$
$a_\tau - ?$



Kampas tarp pilnojo ir normalinio pagreičių: $tg\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}$;

čia a_τ - taško tangentinis pagreitis, a_n - taško normalinis pagreitis.

Iš čia išreiškę taško tangentinį pagreitį a_τ, gauname:

$a_\tau = a_n \cdot tg\alpha$;

$a_\tau = 4{,}9 \cdot tg 60^0 = 4{,}9 \cdot 1{,}73 = 8{,}5$ m/s^2.

Atsakymas: $a_\tau = 8{,}5$ m/s^2.

6. Taškas pastoviu pagreičiu juda 30 cm spindulio apskritimu. Apskaičiuokite taško judėjimo tangentinį pagreitį, jeigu žinoma, kad po 4 s nuo judėjimo pradžios normalinis pagreitis 2,7 m/s^2.

Duota:
$R = 30$ cm
$t_1 = 4$ s
$a_n = 2{,}7$ m/s^2
Rasti: $a_\tau - ?$

Pastoviu pagreičiu apskritimu judančio taško tangentinis pagreitis yra:

$a_\tau = \varepsilon \cdot R$;
čia ε - kampinis pagreitis, R – apskritimo spindulys.

Taško normalinis pagreitis:

$a_n = \omega^2 \cdot R$
čia ω - kampinis greitis, R – apskritimo spindulys.

Apskaičiuojame taško kampinį greitį po 4 s nuo judėjimo pradžios:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{a_n}{R}} = \sqrt{\frac{2{,}7}{0{,}30}} = 3 \text{ rad/s.}$$

Tada taško sukamojo judėjimo kampinis pagreitis yra lygus:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1} = \frac{3-0}{4} = 0{,}75 \text{ m/s}^2.$$

Apskaičiuojame taško judėjimo tangentinį pagreitį:

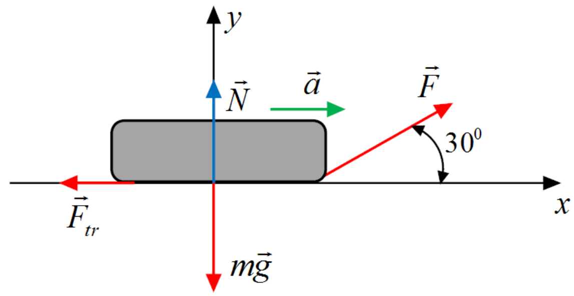
$a_\tau = 0{,}75 \cdot 0{,}30 = 0{,}225$ m/s^2.

Atsakymas: $a_\tau = 0{,}225$ m/s^2.

Pagrindinis dinamikos dėsnis. Judesio kiekio tvermės dėsnis. Mechaninis darbas ir mechaninės energijos rūšys. Tvermės dėsniai mechanikoje.

7. Kūnas, kurio masė 45 kg, tempiamas 294 N jėga, sudarančia kampą α = 30º. Trinties koeficientas 0,1. Apskaičiuoti kūno judėjimo pagreitį. (Ats.: 5 m/s^2)

$m = 45\,\mathrm{kg}$
$F = 294\,\mathrm{N}$
$\alpha = 30^0$
$f = 0{,}1$
a - ?



Taikome II-ąjį Niutono dėsnį:

$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$;
$\vec{F}_{tr} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}$; (1)

čia $F_{tr} = f \cdot N$ - trinties jėgą, N - plokštumos normalinės reakcijos jėga, mg - kūno sunkio jėga.

Projektuojame vektorinę lygtį (1) į ašį y:

$N - mg + F \cdot \sin\alpha = 0$;
$N = mg - F\sin\alpha$.

Projektuojame vektorinę lygtį (1) į ašį x:

$-F_{tr} + F \cdot \cos\alpha = m \cdot a$,
$-f \cdot (mg - F\sin\alpha) + F \cdot \cos\alpha = m \cdot a$.

Iš čia išreiškę kūno pagreitį, gauname:

$$a = \frac{-f \cdot (mg - F\sin\alpha) + F \cdot \cos\alpha}{m} = \frac{-0{,}1 \cdot (45 \cdot 9{,}81 - 294 \cdot 0{,}50) + 294 \cdot 0{,}866}{45} = 5{,}0\,\mathrm{m/s^2}.$$

Atsakymas: $a = 5{,}0\,\mathrm{m/s^2}$.

8. 5 kg masės kūnas juda pagal dėsnį $s = 18t + 3t^2$ m. Rasti šį kūną veikiančią jėgą.

Duota:
$m = 5\,\mathrm{kg}$
$s = 18t + 3t^2\,\mathrm{m}$
Rasti: F – ?

Pagal II-ąjį Niutono dėsnį kūną veikianti jėga yra lygi:

$F = m \cdot a$; čia $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$ - kūno pagreitis.

Nustatome kūno pagreičio išraišką:

$$\frac{ds}{dt} = \left(18t + 3t^2\right)' = 18\cdot 1 + 3\cdot 2t = 6t + 18\,(\text{m/s});$$

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \left(6t + 18\right)' = 6\cdot 1 + 0 = 6\,(\text{m/s}^2).$$

Apskaičiuojame kūną veikiančią jėgą, kai $t = 5\,\text{s}$:

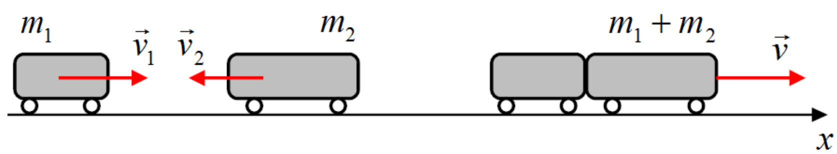
$$a(t = 5) = 6\,\text{m/s}^2;$$

$$F = m\cdot a = 2\cdot 6 = 30\,\text{N}.$$

Atsakymas: $F = 30\,\text{N}$.

9. Dvi geležinkelio platformos juda viena priešais kitą 0,3 m/s ir 0,2 m/s greičiu. Platformos masės 16 t ir 24 t. Kokiu greičiu judės platformos po susidūrimo?

Duota:
$v_1 = 0{,}3\,\text{m/s}$
$v_2 = 0{,}2\,\text{m/s}$
$m_1 = 16\,\text{t}$
$m_2 = 24\,\text{t}$
Rasti: $v - ?$



prieš po

Taikome judesio kiekio tvermės dėsnį:

$$\vec{p}_{prieš} = \vec{p}_{po};$$

$\vec{p}_{prieš} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$ - sistemos judesio kiekis prieš susidūrimą,

$\vec{p}_{po} = (m_1 + m_2)\vec{v}$ - sistemos judesio kiekis po susidūrimo.

Projektuojame vektorinę lygtį į ašį x:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)\cdot v.$$

Iš čia išreiškę platformų greitį po susidūrimo, gauname:

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v = \frac{16\cdot 0{,}3 - 24\cdot 0{,}2}{16 + 24} = 0.$$

Atsakymas: $v = 0$.

10. 120 N svorio sviedinys, lėkdamas 320m/s greičiu, pataiko į sieną, ją pramušęs toliau lekia 144km/h greičiu. Kokį darbą jis atlieka pramušdamas sieną?

Duota:
$P = 120\,\text{N}$
$v_1 = 320\,\text{m/s}$
$v_2 = 144\,\text{km/h}$
Rasti: $A - ?$

Darbas, kurį sviedinys atlieka pramušdamas siena yra lygus sviedinio kinetinės energijos pokyčiui:

$$A = |\Delta W_k| = \left| \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} \right| = \frac{P}{2g} \cdot \left| v_2^2 - v_1^2 \right|;$$
$$A = \frac{120}{2 \cdot 9{,}81} \cdot \left| \left(\frac{144}{3{,}6} \right)^2 - 320^2 \right| = 6{,}17 \cdot 10^5\ \text{J} = 617\,\text{kJ}.$$

Atsakymas: $A = 617\,\text{kJ}.$

Jėgų momentas ir judesio kiekio momentas taško ir ašies atžvilgiu. Kūno inercijos momentas. Heigenso ir Šteinerio teorema. Pagrindinis dinamikos dėsnis sukamajam judėjimui. Judesio kiekio momento tvermės dėsnis.

11. Ištisinio disko masė 0,5 kg, skersmuo 40 cm. Diskas sukasi 30 aps per sekundę dažniu. Apskaičiuokite stabdymo jėgos momentą, jeigu diskas, tolygiai lėtėdamas sustojo po 20 s.

Duota:
$m = 0{,}5\,\text{kg}$
$d = 40\,\text{cm}$
$\nu_0 = 30\,\text{aps/s}$
$\tau = 20\,\text{s}$
Rasti: $M_{stab} - ?$

Pasinaudosime pagrindiniu sukamojo judėjimo dinamikos dėsniu:

$M = I \cdot \varepsilon$,

kur M - kūną veikiančios jėgos momentas, $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$ - disko inercijos momentas, ε - disko kampinis pagreitis.

Kadangi diskas sustojo tolygiai lėtėdamas, tai stabdymo pagreitis yra pastovus $\varepsilon = const$ ir yra lygus :

$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{|\omega - \omega_0|}{\tau} = \frac{\omega_0}{\tau} = \frac{2\pi \cdot \nu_0}{\tau}$, kai $\omega = 0$ (diskas sustojo) ; čia $\omega = 2\pi \cdot \nu$ - disko kampinis pagreitis.

Įrašę disko inercijos momento ir stabdymo pagreičio išraiškas į pagrindinio sukamojo judėjimo dinamikos dėsnio formulę, apskaičiuojame stabdymo jėgos momentą :

$$M_{stab} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi \cdot \nu_0}{\tau} = \frac{\pi \cdot m \cdot d^2 \cdot \nu_0}{4 \cdot \tau},$$

$$M_{stab} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4^2 \cdot 30}{4 \cdot 20} = 0{,}092 \text{ N}.$$

Atsakymas: $M_{stab} = 0{,}092$ N.

12. Apskaičiuokite plono vienalyčio 0,6 m ir 0,1 kg strypo inercijos momentą atžvilgiu ašies, einančios per tašką, nutolusį nuo jo masės centro per 20 cm.

Duota:
$l = 0{,}6\,\text{cm}$
$m = 0{,}1\,\text{kg}$
$d = 20\,\text{cm}$
Rasti: $I - ?$

Pagal Hiuigenso ir Šteinerio teoremą plono vienalyčio strypo inercijos momentas atžvilgiu ašies, einančios per tašką, nutolusį nuo jo masės centro per 20 cm, yra lygus

$$I = I_0 + m \cdot d^2;$$

čia $I_0 = \frac{1}{12} ml^2$ - plono vienalyčio strypo inercijos momentas jo simetrijos ašies atžvilgiu,
d - atstumas nuo ašies, einančios per strypo vidurį, iki nagrinėjamos ašies.

Apskaičiuojame plono vienalyčio strypo inercijos momentą atžvilgiu ašies, einančios per tašką, nutolusį nuo jo masės centro per 20 cm:

$$I = \frac{1}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}6^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}007\,\text{kg·m}^2.$$

Atsakymas: $I = 0{,}007$ kg·m^2.