Ištirti funkciją ir nubrėžti jos grafiką.

$$y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$$

1) Funkcijos apibrėžimo sritis:

$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$.

$Dy:\ x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

2) Funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė, kadangi:

$$y(-x)=\frac{(-x+1)^2}{-x-2}\neq y(x).$$

Funkcija nėra periodinė.

3) Funkcijos trūkio taškai:

$$x=2:\ \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\begin{cases}-\infty,\ kai\ x\to 2-0\\ +\infty,\ kai\ x\to 2+0\end{cases}$$ - antros rūšies trūkio taškas

4) Nustatome funkcijos kritinius taškus.

Apskaičiuojame funkcijos pirmos eilės išvestinę:

$$y'=\left(\frac{(x+1)^2}{x-2}\right)'=\frac{\left((x+1)^2\right)'\cdot(x-2)-(x+1)^2\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}=\frac{2(x+1)\cdot(x-2)-(x+1)^2\cdot 1}{(x-2)^2}=$$
$$=\frac{2x^2-4x+2x-4-x^2-2x-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}$$

Nustatome kritinius taškus:

$y'=0:\ x^2-4x-5=0;$

$x_1=5;\ \ x_2=-1;$

$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2$.

5) Nustatome funkcijos monotoniškumo intervalus. Randame funkcijos ekstremumo taškus.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;2)$	2	$(2;5)$	5	$(5;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	0	$\downarrow$	$\nexists$	$\downarrow$	12	$\uparrow$

$$y(-1)=\frac{(-1+1)^2}{-1-2}=0;$$

$$y(5)=\frac{(5+1)^2}{5-2}=\frac{36}{3}=12.$$

Taške $x=-1$ funkcijos $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$ grafikas turi lokalų maksimumą, kadangi funkcijos pirmoji išvestinė tame taške keičia ženklą iš + į -.

Taške $x=5$ funkcijos $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$ grafikas turi lokalų minimumą, kadangi funkcijos pirmoji išvestinė tame taške keičia ženklą iš - į +.

6) Apskaičiuojame grafiko perlinkio taškų koordinates. Nustatome funkcijos grafiko iškilumo intervalus.

Apskaičiuojame funkcijos antros eilės išvestinę:

$$y''=\left(\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}\right)'=\frac{(x^2-4x-5)'\cdot(x-2)^2-(x^2-4x-5)\cdot\left((x-2)^2\right)'}{\left((x-2)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x-4)\cdot(x-2)^2-(x^2-4x-5)\cdot 2\cdot(x-2)}{(x-2)^4}=\frac{(2x-4)\cdot(x-2)-(x^2-4x-5)\cdot 2}{(x-2)^3}=$$

$$=\frac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x+10}{(x-2)^3}=\frac{18}{(x-2)^3}$$

Nustatome funkcijos perlinkio taškus:

$$y''=0:\ \frac{18}{(x-2)^3}=0 \text{ - sprendimų neturi.}$$

$$x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq 2.$$

Nustatome funkcijos iškilumo (įgaubtumo) intervalus:

x	$(-\infty;2)$	2	$(2;+\infty)$
y''	$-$	$\nexists$	$+$
y	$\frown$	$\nexists$	$\smile$

Funkcijos grafikas vingio taškų neturi.

7) Nustatome funkcijos grafiko asimptotes:

a) vertikaliosios asimptotės

$$x=2:\ \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)^2}{x-2}=\begin{cases}-\infty, & kai\ x\to 2-0\\ +\infty, & kai\ x\to 2+0\end{cases}$$

b) pasviroji asimptotė $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{(x+1)^2}{x-2}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2-2x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}{1-\frac{2}{x}} = \frac{(1+0)^2}{1-0} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+1)^2}{x-2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x+1)^2 - x\cdot(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x+1-x^2+2x}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x+1}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{4+0}{1-0} = 4.$$

Funkcijos grafikas turi pasviriąją asimptotę $y = x + 4$.

8) Funkcijos grafiko susikirtimo su koordinačių ašimis taškai:

su ašimi 0x, $y = 0:\ \frac{(x+1)^2}{x-2} = 0 \Rightarrow x = -1;$

Funkcijos $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ grafiko susikirtimo su ašimi 0x taškas: $(-1;0)$.

su ašimi 0y, $x = 0:\ y(0) = \frac{(0+1)^2}{0-2} = -0{,}5$

Funkcijos $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ grafiko susikirtimo su ašimi 0y taškas: $(0;-0{,}5)$.

9) Braižome funkcijos grafiką: