1. Raskite funkcijų išvestines:

a) $y=\frac{x^4}{4}-3\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^6}-e$

$$y'=\left(\frac{x^4}{4}-3\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^6}-e\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3-3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}+2\cdot(-6)\cdot\frac{1}{x^7}-0=x^3-2\cdot x^{-\frac{1}{3}}-12\cdot\frac{1}{x^7}=x^3-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-\frac{12}{x^7}$$

b) $y=\left(x^3+6\right)^5\cdot 6^{4x-3}$

$$y'=\left(\left(x^3+6\right)^5\right)'\cdot 6^{4x-3}+\left(x^3+6\right)^5\cdot\left(6^{4x-3}\right)'=5\cdot\left(x^3+6\right)^4\cdot\left(x^3+6\right)'\cdot 6^{4x-3}+\left(x^3+6\right)^5\cdot 6^{4x-3}\cdot\ln 6\cdot(4x-3)'=$$
$$=5\cdot\left(x^3+6\right)^4\cdot\left(3x^2+0\right)\cdot 6^{4x-3}+\left(x^3+6\right)^5\cdot 6^{4x-3}\cdot\ln 6\cdot(4\cdot 1-0)=15x^2\cdot\left(x^3+6\right)^4\cdot 6^{4x-3}+4\ln 6\cdot\left(x^3+6\right)^5\cdot 6^{4x-3}$$

c) $y=\arccos\frac{x^2}{4-x^3}$

$$y'=\left(\arccos\frac{x^2}{4-x^3}\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{4-x^3}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x^2}{4-x^3}\right)'=-\frac{4-x^3}{\sqrt{\left(4-x^3\right)^2-x^4}}\cdot\frac{\left(x^2\right)'\cdot\left(4-x^3\right)-x^2\cdot\left(4-x^3\right)'}{\left(4-x^3\right)^2}=$$
$$=-\frac{4-x^3}{\sqrt{4^2-4\cdot 2\cdot x^3+x^6-x^4}}\cdot\frac{2x\cdot\left(4-x^3\right)-x^2\cdot\left(0-3x^2\right)}{\left(4-x^3\right)^2}=-\frac{1}{\sqrt{x^6-x^4-8x^3+16}}\cdot\frac{8x-2x^4+3x^4}{4-x^3}=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{x^6-x^4-8x^3+16}}\cdot\frac{x^4+8x}{4-x^3}$$

2. Raskite neišreikštinės funkcijos išvestinę: $tg(x+y)=\frac{y}{x}$.

$$(tg(x+y))'=\left(\frac{y}{x}\right)';$$
$$\frac{1}{\cos^2(x+y)}\cdot(x+y)'=\frac{y'\cdot x-y\cdot x'}{x^2};$$
$$\frac{1}{\cos^2(x+y)}\cdot(1+y')=\frac{y'\cdot x-y\cdot 1}{x^2};$$
$$\frac{1}{\cos^2(x+y)}+\frac{1}{\cos^2(x+y)}\cdot y'=y'\cdot\frac{1}{x}-\frac{y}{x^2};$$
$$y'\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos^2(x+y)}\cdot y'=\frac{1}{\cos^2(x+y)}+\frac{y}{x^2};$$
$$y'=\frac{\frac{1}{\cos^2(x+y)}+\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos^2(x+y)}}=\frac{\frac{x^2+y\cdot\cos^2(x+y)}{x^2\cdot\cos^2(x+y)}}{\frac{\cos^2(x+y)-x}{x\cdot\cos^2(x+y)}}=\frac{x^2+y\cdot\cos^2(x+y)}{x\cdot\left(\cos^2(x+y)-x\right)}$$

3. Taikydamo logaritminį diferencijavimą, raskite funkcijos išvestinę: $y=(arcctg4x)^{\sin\frac{x}{3}}$.

$$(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y' \Rightarrow y'=y\cdot(\ln y)'.$$

Logaritmuojame duotos funkcijos abi puses: $\ln y=\ln(arcctg4x)^{\sin\frac{x}{3}}=\sin\frac{x}{3}\cdot\ln(arcctg4x)$.

Apskaičiuojame funkcijos logaritmo išvestinę $(\ln y)'$:

$$(\ln y)'=\left(\sin\frac{x}{3}\right)'\cdot\ln(arcctg4x)+\sin\frac{x}{3}\cdot(\ln(arcctg4x))'=\cos\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'\cdot\ln(arcctg4x)+$$

$$+\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{arcctg4x}\cdot(arcctg4x)'=\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ln(arcctg4x)+\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{arcctg4x}\cdot\frac{-1}{1+(4x)^2}\cdot4=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\ln(arcctg4x)-\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{arcctg4x}\cdot\frac{4}{1+16x^2}$$

Iš čia funkcijos išvestinė:

$$y'=y\cdot(\ln y)'=y=(arcctg4x)^{\sin\frac{x}{3}}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\ln(arcctg4x)-\sin\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{arcctg4x}\cdot\frac{4}{1+16x^2}\right).$$

4. Raskite funkcijos, apibrėžtos parametrinėmis lygtimis, išvestinę: $\begin{cases}x=\arccos\sqrt{t}\\ y=\ln(1-t)\end{cases}$.

$$x_t'=\left(\arccos\sqrt{t}\right)_t'=-\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{t}^2}}\cdot\left(\sqrt{t}\right)_t'=-\frac{1}{\sqrt{1-t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}=-\frac{1}{2\sqrt{t-t^2}};$$

$$y_t'=(\ln(1-t))_t'=\frac{1}{1-t}\cdot(1-t)_t'=\frac{1}{1-t}\cdot(0-1)=-\frac{1}{1-t};$$

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{-\frac{1}{1-t}}{-\frac{1}{2\sqrt{t-t^2}}}=\frac{2\sqrt{t-t^2}}{1-t}=\frac{2\sqrt{t}\cdot\sqrt{1-t}}{1-t}=2\cdot\sqrt{\frac{t}{1-t}}$$

Atsakymas: $y_x'=2\cdot\sqrt{\frac{t}{1-t}}$

5. Raskite funkcijos $y=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$ diferencialą taške $x=\frac{\pi}{4}$.

Funkcijos diferencialas:

$$y'=\frac{(tgx)'\cdot\sqrt{1+tg^2x}-tgx\cdot\left(\sqrt{1+tg^2x}\right)'}{\left(\sqrt{1+tg^2x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\cos^2x}\cdot\sqrt{1+tg^2x}-tgx\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+tg^2x}}\cdot 2tgx\cdot\frac{1}{\cos^2x}}{1+tg^2x}=$$

$$=\frac{\sqrt{1+tg^2x}-tg^2x\cdot\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}}{\left(1+tg^2x\right)\cdot\cos^2x}=\frac{1+tg^2x-tg^2x}{\left(1+tg^2x\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2x}=\frac{1}{\left(1+tg^2x\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2x};$$

$$dy=y'\cdot dx=\frac{1}{\left(1+tg^2x\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2x}\cdot dx.$$

Apskaičiuoju funkcijos $y=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}$ diferencialą taške $x_0=\frac{\pi}{4}$:

$$dy\big|_{x_0=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\left(1+tg^2\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot dx=\frac{1}{\left(1+1^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot dx=\frac{1}{1\cdot\frac{1^2}{2}}\cdot dx=2\cdot dx.$$

6. Tarkime, kad $z(x)=\sqrt[3]{1+20x}$. Taikydami diferencialą, užrašykite apytikslę formulę, kai $x\to 0$.

Sprendimas

Funkcijos apytikslė reikšmė taške $x=x_0$: $z(x)\approx z(x_0)+z'(x_0)\cdot x$.

$$z(0)=\sqrt[3]{1+20\cdot 0}=1;$$

$$z'(x)=\left(\sqrt[3]{1+20x}\right)'=\frac{1}{3}\cdot(1+20x)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1+20x)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+20x)^2}}\cdot 20=\frac{20}{3\cdot\sqrt[3]{(1+20x)^2}};$$

$$z'(0)=\frac{20}{3\cdot\sqrt[3]{(1+20\cdot 0)^2}}=\frac{20}{3}.$$

Iš čia turime:

$$z(x)\approx 1+\frac{20}{3}x,\ \text{kai}\ x\to 0.$$

Atsakymas: $z(x)\approx 1+\frac{20}{3}x$.

7. Diferencijavimo taikymas: rasti sudėtinės funkcijos pilną diferencialą.

$z(x, y) = x^2 - 2xy^2 + 6xy$

Funkcijos $z(x, y)$ pilnas diferencialas:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy .$$

Apskaičiuojame funkcijos $z = x^2 - 2xy^2 + 6xy$ dalines išvestines:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 - 2xy^2 + 6xy\right)'_x = 2x - 2 \cdot 1 \cdot y^2 + 6 \cdot 1 \cdot y = 2x - 2y^2 + 6y ;$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 - 2xy^2 + 6xy\right)'_y = 0 - 2x \cdot 2y + 6x \cdot 1 = -4xy + 6x .$$

Tada funkcijos $z(x, y) = x^2 - 2xy^2 + 6xy$ pilnas diferencialas:

$$dz = \left(2x - 2y^2 + 6y\right) \cdot dx + \left(-4xy + 6x\right) \cdot dy .$$